**GLI INSIEMI**

*Definizione:* Un insieme, rappresentano con le lettere maiuscole, è una collezione di elementi, rappresentano con le lettere minuscole.

L’insieme più grande di numeri è quello dei **numeri reali ℝ**, composto da altri sottoinsiemi.

Il primo di questi è l’insieme dei **numeri naturali ℕ**, in cui è possibile mettere in **relazione di uguaglianza** gli elementi e svolgere tra questi le operazioni di **somma e prodotto**.

*Definizione:* Un **assioma** è una proprietà non dimostrabile, mentre un **teorema** è dimostrabile

* ***Assiomi fondamentali*** *della relazione di uguaglianza*

Attraverso la relazione di uguaglianza 𝑎 = 𝑏 con 𝑎, 𝑏 ∈ ℕ, si stabilisce che i simboli 𝑎 e 𝑏 identificano lo stesso numero naturale.

1. **Proprietà riflessiva**

∀ 𝑎 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 = 𝑎

--> ogni elemento dell’insieme è in relazione con sé stesso

1. **Proprietà simmetrica**

∀ 𝑎 , 𝑏 ∈ ℕ | 𝑎 = b ⇒ b = 𝑎

--> dati due elementi 𝑎, b in relazione, quindi uguali tra loro, allora anche 𝑏 è uguale ad 𝑎

1. **Proprietà transitiva**

∀ 𝑎, 𝑏, c ∈ ℕ | 𝑎 = b e b = c ⇒ c = 𝑎

--> data una terna di elementi 𝑎, b, c in cui 𝑎 è in relazione, quindi uguale a 𝑏, e 𝑏 è uguale a c, allora anche c è uguale ad 𝑎

* ***Assiomi fondamentali*** *rispetto all’operazione di somma e prodotto*

1. **Chiusura di ℕ rispetto somma e prodotto**

∀ 𝑎 , 𝑏 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 + b ∈ ℕ, 𝑎 ∗ b ∈ ℕ

--> la somma e il prodotto di due numeri naturali 𝑎, b restituiscono come risultato dei numeri naturali

1. **Proprietà commutativa**

∀ 𝑎 , 𝑏 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 + b = b + 𝑎 ∀ 𝑎 , 𝑏 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 ∗ b = b ∗ 𝑎

1. **Proprietà associativa**

∀ 𝑎, 𝑏, c ∈ ℕ ⇒ (𝑎 + b) + c= 𝑎 + (b + c)

∀ 𝑎, 𝑏, c ∈ ℕ ⇒ (𝑎 ∗ b) ∗ c = 𝑎 ∗ (b ∗ c)

1. **Proprietà distributiva**

∀ 𝑎, 𝑏, c ∈ ℕ ⇒ (𝑎 + b) ∗ c = (𝑎 ∗ c) + (b ∗ c)

1. **Esistenza dell’elemento neutro rispetto al prodotto**

**∃ 1 ∈ ℕ | ∀ 𝑎 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 ∗ 1 = 𝑎**

Questi assiomi sono validi anche per l’insieme dei numeri interi non negativi ℕ0 = ℕ∪{0} per cui vale anche ­­­un ulteriore assioma.

1. **Esistenza dell’elemento neutro rispetto alla somma**

**∃ 0 ∈ ℕ0 | ∀ 𝑎 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 + 0 = 𝑎**

**Identificazione dei numeri interi non negativi**

*Definizione:* Dato un elemento di ℕ0 , si definisce **elemento successivo** il numero incrementato di 1.

**∀ 𝑎 ∈ ℕ0 ⇒ 𝑎 + 1**

Viene da sé, con la definizione di elemento successivo e il 6° assioma, che l’elemento 1 è successivo di 0. Procedendo poi con la catena si genera una successione di **infiniti elementi** (tutti diversi tra loro) che rappresentano in modo completo l’insieme ℕ0.

**✠** L’elemento 0 non è il successivo di un numero intero non negativo.

Con il 6° assioma si può inoltre escludere il fatto che esista un numero naturale qualsiasi che sommato ad un altro dia come risultato 0.

∀ 𝑎 ∈ ℕ0 ∄ ℇ𝑎 ∈ ℕ0 | 𝑎 + ℇ0 = 0

Si introduce così il concetto di elemento opposto, quindi un ulteriore assioma.

*Definizione*: Dato un elemento di ℕ0 , si definisce **elemento opposto** di 𝑎 l’elemento “**−𝑎**”.

Questo elemento sarà un numero negativo, si arriva quindi ad ampliare l’insieme ℕ0 fino all’insieme dei numeri interi ℤ, che comprenderà tutti gli elementi di ℕ0 e tutti i loro opposti. ℕ ⊂ ℕ0 ⊂ ℤ

Per questo insieme, restano validi i precedenti assiomi, ai quali se ne aggiunge un altro.

1. **Esistenza di un elemento opposto per ogni elemento**

**∀ 𝑎 ∈ ℤ ∃ −𝑎 ∈ ℤ | 𝑎 + (−𝑎) = 0**

**✠** L’elemento 0 è un numero intero che però non ha segno, quindi non ha opposto *(vedi dimostrazione)*.

✠ Un numero intero successivo di un numero intero 𝑎 può essere visto come un numero intero ℇ per cui ℇ+(−𝑎)=1.

*Definizione:* Un insieme A è detto **induttivo** se soddisfa le proprietà 1 ∈ A e ∀ 𝑎 ∈ A ⇒ 𝑎 + 1 ∈ A.

**Identificazione dei numeri interi**

Relazione di maggioranza > e minoranza <

*Definizione:* ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℤ

𝑎 > 𝑏 ⇒ 𝑎 +(−𝑏) ∈ ℕ 𝑎 < 𝑏 ⇒ 𝑏 +(−𝑎) ∈ ℕ

𝑎 ≥ 𝑏 ⇒ 𝑎 +(−𝑏) ∈ ℕ0 oppure 𝑎 +(−𝑏) = 0 (cioè 𝑎=𝑏)

𝑎 ≤ 𝑏 ⇒ 𝑏 +(−𝑎) ∈ ℕ0 oppure 𝑏 +(−𝑎) = 0 (cioè 𝑎=𝑏)

Con questa definizione è possibile rappresentare gli elementi dell’insieme su **una retta** in modo ordinato, così che ogni numero intero corrisponda ad un determinato punto geometrico sulla retta.

Si può così giungere alla conclusione che l’insieme

**ℤ è un insieme discreto** in quanto è composto da numeri isolati, quindi presi due numeri, tra questi non è presente nessun altro numero intero.

*Definizione:* La **cardinalità** è il numero di elementi presenti nell’insieme.

Possiamo dimostrabile come ℤ e ℕ abbiano stessa cardinalità *(vedi dimostrazione)* e che quindi **ℤ è un insieme numerabile**, in quanto un insieme viene detto tale se i suoi elementi (infiniti) possono essere messi in corrispondenza biunivoca (relazione 1:1) con i numeri naturali.

Ora però, per dimostrare che dato un elemento 𝑎 non nullo, esista un elemento ℇ per cui si abbia ℇ∙𝑎=1, è necessario introdurre un nuovo elemento.

*Definizione:* Dato un elemento 𝑎, il suo **elemento inverso** viene espresso con il simbolo “**𝑎-1**” oppure “1/𝑎”

Ampliamo così l’insieme ℤ per passare all’insieme dei numeri razionali ℚ , in cui {n/d-1 : n ∈ ℤ e d ∈ ℤ-{0}}.

I precedenti assiomi continuano ad essere validi, ma se ne aggiunge un altro.

1. **Esistenza di un elemento inverso per ogni elemento**

**∀ 𝑎 ∈ ℚ − {0} ⇒ 𝑎∙𝑎-1 =1**

Gli otto assiomi stabiliti per ℚ si dicono assiomi di campo.

* Considerando il sottoinsieme ℚ+, è possibile stabilire un ordine, mediante i **3 assiomi dell’ordine**:
  1. ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℚ+ ⇒ 𝑎+𝑏 ∈ ℚ+ e 𝑎𝑏 ∈ ℚ+
  2. ∀ 𝑎 ∈ ℚ−{0} ⇒ 𝑎 ∈ ℚ+ oppure −𝑎 ∈ ℚ+
  3. 0 ∉ ℚ+

Quindi si ha per *Definizione:* ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℚ

𝑎 > 𝑏 ⇒ 𝑎 +(−𝑏) ∈ ℚ+ 𝑎 < 𝑏 ⇒ 𝑏 +(−𝑎) ∈ ℚ+

𝑎 ≥ 𝑏 ⇒ 𝑎 +(−𝑏) ∈ ℚ+ oppure 𝑎 +(−𝑏) = 0 (cioè 𝑎=𝑏)

𝑎 ≤ 𝑏 ⇒ 𝑏 +(−𝑎) ∈ ℚ+ oppure 𝑏 +(−𝑎) = 0 (cioè 𝑎=𝑏)

Anche ℚ è un insieme **induttivo**, anche se non è possibile definire l’elemento successivo di un dato elemento 𝑎, in quanto tra due numeri razionali distinti si contrappone sempre un ulteriore numero razionale.

Possiamo dunque affermare anche che **ℚ non è un insieme discreto** e che **ℚ è un insieme** denso in quanto ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℚ ∃ 𝓻 ∈ ℚ | 𝑎<𝓻<𝑏, quindipresi due elementi distinti è sempre possibile trovarne un terzo tra i due. Inoltre, **ℚ non è un insieme continuo**, in quanto presa una qualsiasi coppia di numeri razionali tra questi sono presenti dei “buchi” non rappresentabili da un numero razionale. **ℚ è anche un insieme numerabile** perché è ancora possibile stabilire una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

L’insieme che completa definitivamente la retta è l’insieme dei numeri irrazionali 𝕀, che è diverso da ℚ e con esso forma l’insieme dei numeri reali ℝ.

Tutti gli assiomi precedenti sono validi anche in ℝ, ma va considerato anche un ultimo assioma.

Prima è necessario però introdurre alcuni concetti.

Dato un insieme A ⊂ ℝ

*Definizione:* ℳ ∈ ℝ si dice **Maggiorante** di A se

tutti gli elementi di A sono minori o uguali a ℳ

∀ x ∈ A ⇒ x ≤ ℳ

✠ Se A ammette un maggiorante ne ammette infiniti.

*Definizione:* Un insieme si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante, altrimenti si dice illimitato superiormente.

*Definizione:* se A è limitato superiormente

Λ ∈ ℝ si dice **estremo superiore** di A **supA** se  
 Λ è maggiorante ed è il più piccolo tra i maggioranti

1. ∀ x ∈ A ⇒ x ≤ Λ
2. ∀ ℇ > 0 ∃ x ∈ A | x > Λ − ℇ

L’estremo superiore è tale se effettuando un qualsiasi spostamento verso sinistra esiste a destra un elemento di A.

✠ Quindi è estremo superiore se alla sua sinistra non ci sono altri maggioranti.

*Definizione:* M ∈ ℝ si dice **Massimo assoluto** di A **maxA** se

M è maggiorante ed è un elemento di A

1. ∀ x ∈ A ⇒ x ≤ M
2. M ∈ A

✠ Il massimo assoluto se esiste è unico.

*Definizione:* 𝓂 ∈ ℝ si dice **minorante** di A se

tutti gli elementi di A sono minori o uguali a 𝓂

∀ x ∈ A ⇒ x ≥ 𝓂

✠ Se A ammette un minorante ne ammette infiniti.

*Definizione:* Un insieme si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante, altrimenti si dice illimitato inferiormente.

*Definizione:* se A è limitato inferiormente

λ ∈ ℝ si dice **estremo superiore** di A **supA** se  
 λ è maggiorante ed è il più grande tra i minoranti

1. ∀ x ∈ A ⇒ x ≥ λ
2. ∀ ℇ > 0 ∃ x ∈ A | x < λ + ℇ

L’estremo inferiore è tale se effettuando un qualsiasi spostamento verso destra esiste a sinistra un elemento di A.

✠ Quindi è estremo inferiore se alla sua sinistra non ci sono altri minoranti.

*Definizione:* m ∈ ℝ si dice **Minimo assoluto** di A **minA** se

m è minorante ed è un elemento di A

1. ∀ x ∈ A ⇒ x ≤ m
2. m ∈ A

✠ Il minimo assoluto se esiste è unico.

Un insieme potrebbe non ammettere minimo e/o massimo assoluto, ma anche estremo superiore e/o inferiore, quindi anche maggiorante e minorante.

* **Assioma di completezza**   
  (non valido in ℚ perché non completa la retta)

--> Dato un insieme A non vuoto, se questo è limitato superiormente e/o inferiormente, allora ammette rispettivamente estremo superiore e/o inferiore.

Gli insiemi possono essere anche rappresentati come **intervalli**, che possono essere:

* Aperto I = (a, b)

🡪 a e b non fanno parte dell’insieme quindi a = inf I e b = sup I

* Chiuso I = (a, b]

🡪 a non fa parte dell’insieme, ma b si, quindi b = sup I

* Aperto e chiuso I = [a, b]

🡪 a e b fanno parte dell’insieme quindi a = min I e b = max I

* Illimitato superiormente I = {x ∈ ℝ | x ≥ a} = [a, +∞)

🡪 a fa parte dell’insieme quindi a = min I

* Illimitato inferiormente I = {x ∈ ℝ | x ≤ b} = (−∞, b]

🡪 b fa parte dell’insieme quindi b = max I

* Illimitato ℝ = (−∞, +∞)

*Dimostrazione dell’unicità dell’elemento neutro rispetto al prodotto e alla somma*

* Supponiamo per assurdo che esista un altro elemento neutro rispetto al prodotto (o alla somma)

∃ ε ∈ ℕ | ∀ 𝑎 ∈ ℕ ⇒ 𝑎 ∗ ε = 𝑎

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎 ∈ ℕ0 ⇒ 𝑎 ∗ 0 = 0

* Applichiamo il 5° assioma 𝑎 = 𝑎 ∗ 1
* Applichiamo il 6° assioma 𝑎 = 𝑎 ∗ 1 = 𝑎 ∗ (1 + 0)
* Applichiamo la proprietà distributiva   
  𝑎 = 𝑎 ∗ 1 = 𝑎 ∗ (1 + 0) = 𝑎 ∗ 1 + 𝑎 ∗ 0
* Applichiamo il 5° assioma 𝑎 = 𝑎 ∗ 1 + 𝑎 ∗ 0 = 𝑎 + 𝑎 ∗ 0
* Applichiamo la proprietà transitiva 𝑎 = 𝑎 + 𝑎 ∗ 0

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎 ∈ ℕ0 ∄ ℰ𝑎 ∈ ℕ0 | 𝑎 + ℰ𝑎 = 0

*Dimostrazione dell’unicità dell’elemento opposto*

*Dimostrazione* *che* −0 = 0

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎,b ∈ ℤ ⇒ 𝑎(−b) = (−𝑎)b = − 𝑎b

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎 ∈ ℤ ⇒ −(−𝑎) = 𝑎

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℤ se 𝑎 = 𝑏 ⇒ −𝑎 = −𝑏

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℤ ⇒ (−𝑎) + (−𝑏) = −(𝑎+𝑏)

*Dimostrazione* *che* ℤ ~ ℕ

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎 ∈ ℤ-{0} ∄ ℰ𝑎 ∈ ℤ-{0} | 𝑎 ∙ ℰ𝑎 = 1

*Dimostrazione dell’unicità dell’elemento inverso*

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎 ∈ ℚ − {0} ⇒ (−𝑎-1)-1 = 𝑎

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℚ − {0} se 𝑎 = 𝑏 ⇒ 𝑎-1 = 𝑏-1

*Dimostrazione* *che* ∀ 𝑎, 𝑏 ∈ ℚ − {0} ⇒ (𝑎𝑏)-1 = 𝑎-1 𝑏-1

*Dimostrazione* *che* ℕ è illimitato superiormente

*Dimostrazione* *che* ℚ è denso in ℝ

*Dimostrazione* *che* 𝕀 è denso in ℝ